217

$b_3=\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}$ ise $[u_1,u_2]$ ve $[b_1,b_2,b_3]$ sıralı bazlarına göre L'nin matris temsilini bul.

$$\left(\begin{array}{ccc|cc}1&1&1&2&1\\0&1&1&3&4\\0&0&1&-1&2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&-1&-3\\0&1&0&4&2\\0&0&1&-1&2\end{array}\right)$$

$$A=\begin{bmatrix}-1&-3\\4&2\\-1&2\end{bmatrix}$$

218

Benzerlik

n-boyutlu bir vektör uzayı V'den V'ye giden bir L lineer dönüşümünün matris temsili, sıralı bazların değişimine göre farklı n×n tipindeki matrislerdir. Şimdi bu matrisler arasındaki bağıntıyı araştıralım.

219

Örnek: $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $L(x)=\begin{bmatrix}2x_1\\x_1+x_2\end{bmatrix}$ olsun.

$L(e_1)=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ ve $L(e_2)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ olduğundan $[e_1,e_2]$ doğal baza göre L'nin matris temsili (gösterimi) $A=\begin{bmatrix}2&0\\1&1\end{bmatrix}$ dir. $L(x)=A\cdot X$. $\mathbb{R}^2$'deki farklı bir sıralı baza göre L'nin matris temsili değişecektir. Örneğin $u_1=\begin{bmatrix}-1\\4\end{bmatrix}$, $u_2=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ olmak üzere $[u_1,u_2]$ sıralı bazına göre L'nin matris temsilini bulalım.

220

$$\left\{\begin{array}{l}L(u_1)=s_{11}u_1+s_{21}u_2\\L(u_2)=s_{12}u_1+s_{22}u_2\end{array}\right.\qquad B=\begin{bmatrix}s_{11}&s_{12}\\s_{21}&s_{22}\end{bmatrix}$$

$$L(u_1)=A\cdot u_1=\begin{bmatrix}2&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}$$

$$L(u_2)=A\cdot u_2=\begin{bmatrix}2&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$$

$[e_1,e_2]$ sıralı bazından $[u_1,u_2]$ sıralı bazına geçiş matrisini bulmamız gerekir. Bunun için $[u_1,u_2]$ bazından $[e_1,e_2]$ bazına geçiş matrisini buluruz. Bunun tersi istediğimiz geçiş matrisidir.

221

$$U=\begin{bmatrix}-1&1\\4&2\end{bmatrix}=(u_1,u_2)$$

$[e_1,e_2]$ bazından $[u_1,u_2]$ bazına geçiş matrisi $U^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}&1/6\\2/3&1/6\end{bmatrix}$ dir.

$L(u_1)$'in ve $L(u_2)$'nin $[u_1,u_2]$ bazına göre koordinat vektörleri

$$[L(u_1)]_{[u_1,u_2]}=U^{-1}L(u_1)=U^{-1}\cdot A\cdot u_1=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}&1/6\\2/3&1/6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7/6\\-5/6\end{bmatrix}$$

$$[L(u_2)]_{[u_1,u_2]}=U^{-1}L(u_2)=U^{-1}Au_2=\begin{bmatrix}-1/6\\11/6\end{bmatrix}$$

222

$$L(u_1)=\frac{7}{6}u_1+\left(-\frac{5}{6}\right)u_2$$

$$L(u_2)=\left(-\frac{1}{6}\right)u_1+\left(\frac{11}{6}\right)u_2$$

$$B=\begin{bmatrix}7/6&-1/6\\-5/6&11/6\end{bmatrix}$$

A ile B arasındaki bağıntı nedir?

$$B=(U^{-1}Au_1,\ U^{-1}Au_2)=U^{-1}\cdot A\,(u_1,u_2)=U^{-1}AU$$

$$B=U^{-1}AU$$

223

Teorem: $E=[v_1,v_2,\dots,v_n]$ ve $F=[w_1,w_2,\dots,w_n]$ verilen bir vektör uzayının iki sıralı bazı, $L:V\to V$ bir lineer dönüşüm ve S, F'den E'ye geçiş matrisi olsun. A, E bazına göre L'nin matris temsili ve B, F bazına göre L'nin matris temsili ise

$$B=S^{-1}AS$$

dır.

224

Tanım: A ve B, n×n tipinde matrisler olsun. $B=S^{-1}AS$ olacak şekilde singüler olmayan bir S matrisi varsa B'ye A'ya benzerdir denir.

B, A'ya benzer ise $A=(S^{-1})^{-1}BS^{-1}$ olduğundan A'da B'ye benzerdir. Kısaca A ve B'ye benzer matrisler denir.

Yukarıdaki teoreme göre n×n tipindeki A ve B, aynı lineer dönüşümün matris temsilleri ise A ve B benzerdir. Tersine L'nin $[v_1,v_2,\dots,v_n]$

sıralı bazına göre matris temsili A ve singüler olmayan bir S matrisi için $B=S^{-1}AS$ olsun.

Eğer

$$w_1 = s_{11}v_1 + s_{21}v_2 + \dots + s_{n1}v_n$$
$$w_2 = s_{12}v_1 + s_{22}v_2 + \dots + s_{n2}v_n$$
$$\vdots$$
$$w_n = s_{1n}v_1 + s_{2n}v_2 + \dots + s_{nn}v_n$$

ise $[w_1, w_2, \dots, w_n]$, V'nin bir sıralı bazı ve B, $[w_1, w_2, \dots, w_n]$ bazına göre L'nin matris temsilidir.

Örn. 1) D, P_3 üzerinde türev operatörü olsun. ($D: P_3 \to P_3$) $[x^2, x, 1]$ bazına göre A ve $[1, 2x, 4x^2-2]$ bazına göre D'nin B temsil matrisini bulunuz.

$$D(x^2) = 2x = 0.x^2 + 2.x + 0.1$$
$$D(x) = 1 = 0.x^2 + 0.x + 1.1$$
$$D(1) = 0 = 0.x^2 + 0.x + 0.1$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ dır.}$$

$$D(1) = 0 = 0.1 + 0.(2x) + 0.(4x^2-2)$$
$$D(2x) = 2 = 2.1 + 0.2x + 0(4x^2-2)$$
$$D(4x^2-2) = 8x = 0.1 + 4.(2x) + 0.(4x^2-2)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$[1, 2x, 4x^2-2]$ bazından $[x^2, x, 1]$ bazına geçiş matrisi

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B = S^{-1}AS \text{ dir.}$$

2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ olmak üzere $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineer operatörü $L(x) = Ax$ olsun. $[e_1, e_2, e_3]$ bazına göre L'nin matris temsili A'dır.

$y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $y_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $y_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ olmak üzere $[y_1, y_2, y_3]$ sıralı bazına göre L'nin matris temsili bul?

$$L(y_1) = Ay_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$L(y_1) = Ay_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = 1.\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + 0.\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + (-\tfrac{1}{2})\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$L(y_2) = Ay_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix} = (-4)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + (-7)\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$L(y_3) = Ay_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = (-4)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + (-4)\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 0 & 7 & 4 \\ -1/2 & -7 & -4 \end{bmatrix}$$

$[y_1, y_2, y_3]$'den $[e_1, e_2, e_3]$ geçiş matrisi

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow S^{-1}$$

$$B = S^{-1}AS$$

5. ÖZDEĞERLER

Özdeğerler ve özvektörler:

Tanım: A, n×n tipinde bir matris olsun. $Ax = \lambda x$ eşitliğini sağlayan sıfırdan farklı bir x vektörü varsa λ skalerine A'nın özdeğeri veya karakteristik değeri denir ve x vektörünede λ'ya karşı gelen özvektör denir. (veya λ'ya ait özvektör denir)

Örn: $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ve $x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ olsun.

$$Ax = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow Ax = 3x$$

λ A'nın özdeğeri ve x'de λ'ya karşı gelen özvektör ise αx'de λ'ya karşı gelen özvektördür.

$$Ax = \lambda x$$
$$A(\underline{\alpha x}) = \alpha Ax = \alpha(\lambda x) = \lambda(\underline{\alpha x})$$

233

$Ax=\lambda x$ denklemi

$$(Ax-\lambda x)=0 \Rightarrow (A-\lambda I)x=0 \quad (*)$$

formunda yazılabilir. λ'nın A'nın özdeğeri olması için gerek ve yeter şart (*) denkleminin aşikar olmayan çözüme sahip olmasıdır. (*) denkleminin çözüm kümesi $\mathbb{R}^n$'nin bir alt uzayı $N(A-\lambda I)$dır. Dolayısıyla λ, A'nın özdeğeri ise $N(A-\lambda I)\neq\{0\}$ ve $N(A-\lambda I)$ daki herhangi sıfırdan farklı bir vektör, λ'ya karşı gelen bir özvektördür. $N(A-\lambda I)$ alt uzayına λ'ya karşı gelen <u>özuzay</u> denir.

234

(*) denkleminin aşikar olmayan çözümünün olması için gerek ve yeter şart $A-\lambda I$'nın singüler olması, yani $\det(A-\lambda I)=0$ olmasıdır. Eğer $A-\lambda I$ matrisinin determinantını açarsak λ değişken olmak üzere n. dereceden bir polinom elde ederiz. $p(\lambda)=\det(A-\lambda I)$ bu polinoma <u>karakteristik polinom</u>, $\det(A-\lambda I)=0$ da A'nın <u>karakteristik denklemi</u> denir.

235

karakteristik polinomun kökleri, A'nın özdeğerleridir. karakteristik polinom n-tane köke sahiptir. Bunlar katlı veya karmaşık (kompleks) sayı olabilir.

Teorem: A, $n\times n$ tipinde bir matris ve λ bir skalar olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir

(a) λ, A'nın özdeğeridir
(b) $(A-\lambda I)x=0$ aşikar olmayan çözüme sahiptir.
(c) $N(A-\lambda I)\neq\{0\}$
(d) $A-\lambda I$ singüler
(e) $\det(A-\lambda I)=0$ dır.

236

Örk: 1) $A=\begin{bmatrix}1&2\\4&3\end{bmatrix}$ matrisinin özdeğerlerini ve bu özdeğerlere karşı gelen özvektörleri bulunuz.

A'nın karakteris denklemi

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 4 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0 \Rightarrow \lambda^2-4\lambda-5=0$$

A'nın özdeğerleri $\lambda_1=-1$, $\lambda=5$ dir. $\lambda_1=-1$'e karşı gelen özvektör, bulmak için $A-(-1)I=A+I$'nın sıfır uzayı $N(A+I)$'yı bulmamız gerekir.

237

$$(A+I)x=0 \Rightarrow \begin{bmatrix}2&2\\4&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x=\begin{bmatrix}a\\-a\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

$$N(A+I)=\left\{a\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} : a\in\mathbb{R}\right\}$$

$\lambda_1=-1$'e karşı gelen bir özvektör $\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ dır.

$\lambda_2=5$ $\quad (A-5I)x=0 \Rightarrow \begin{bmatrix}-4&2\\4&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

$4x_1-2x_2=0$
$x_1=\alpha$
$x_2=2\alpha$

$$N(A-5I)=\left\{\alpha\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} : \alpha\in\mathbb{R}\right\}$$

$\lambda_2=5$'e karşı gelen bir özvektör $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ dır.

238

2) $A=\begin{bmatrix}2&-3&1\\1&-2&1\\1&-3&2\end{bmatrix}$ matrisinin özdeğer ve özvektörlerini bulunuz

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix}2-\lambda&-3&1\\1&-2-\lambda&1\\1&-3&2-\lambda\end{vmatrix} = \lambda(\lambda-1)^2$$

$\lambda_1=0$ ve $\lambda_2=\lambda_3=1$ özdeğerler.

$\lambda_1=0$ $\quad Ax=0 \quad \begin{bmatrix}2&-3&1\\1&-2&1\\1&-3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$

$$N(A)=\left\{a\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} : a\in\mathbb{R}\right\}$$

$x=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ dir.

239

$\lambda_2=\lambda_3=1$ $\quad [A-\lambda I]X=0$

$$\begin{bmatrix}1&-3&1\\1&-3&1\\1&-3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$x_1-3x_2+x_3=0$
$x_3=\alpha$
$x_2=\beta$
$x_1=3\beta-\alpha$

$$N(A-\lambda I)=\left\{\begin{bmatrix}3\beta-\alpha\\\beta\\\alpha\end{bmatrix} : \alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\}$$

$\begin{bmatrix}3\\1\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$ özvektörlerdir.

240